Análisis mediante ecuaciones circulares (mallas)

Si en un circuito se tienen "n" nudos y "r" ramas, se tienen "$2r$" incógnitas (las tensiones y intensidades de rama) y se tienen "r" ecuaciones de rama independientes por lo que se necesitan otras "r" ecuaciones **independientes**. Para elegir estas "r" ecuaciones independientes se dispone de las siguientes ecuaciones:

- "n" ecuaciones nodales (primera ley de Kirchoff).
- "l" ecuaciones circulares (segunda ley de Kirchoff).

En principio harían falta todas ellas, pero se verá que se puede resolver el circuito con solamente un conjunto de ellas.

Consideremos un circuito con fuentes de continua y resistencias, representado en la Figura 1.

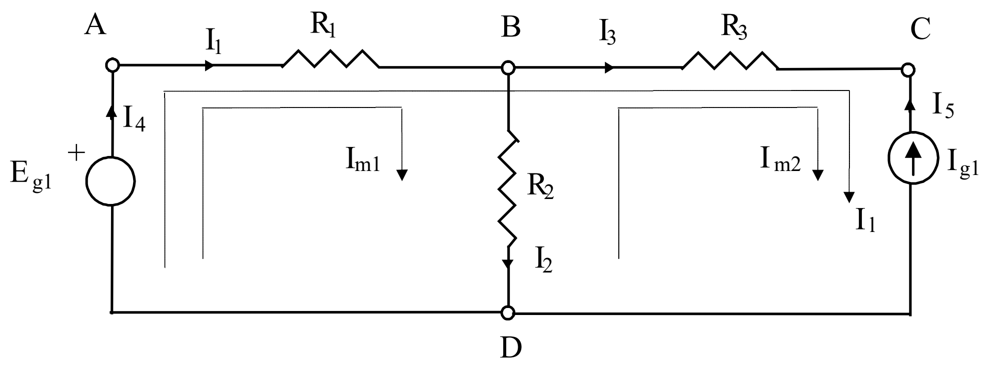

Figura 1. Circuito con fuentes de continua y resistencias.

En lo relacionado con las <u>*ecuaciones circulares*</u> se utiliza el segundo axioma de Kirchoff:

$$m_1)\ U_4 + U_1 + U_2 = 0$$

$$m_2) - U_2 + U_3 - U_5 = 0$$

$$l)\ U_4 + U_1 + U_3 - U_5 = 0$$

Se comprueba que la ecuación circular de un lazo (l) se puede obtener a partir de las mallas que contiene.

En lo relacionado a las <u>*ecuaciones de rama*</u> se tienen r ecuaciones.

Entonces se tienen $2 - r$ **incógnitas** y $(n - 1) + \big(r - (n - 1)\big) + r = 2 \cdot r$ **ecuaciones**.

Es decir, las **ecuaciones de todas las mallas** son linealmente independientes.

Se podría comprobar que son $r-(n-1)$ ecuaciones, en este caso $5-(4-1)=2$.

Consideremos un circuito con solamente fuentes de tensión de continua y resistencias, representado en la Figura 2.

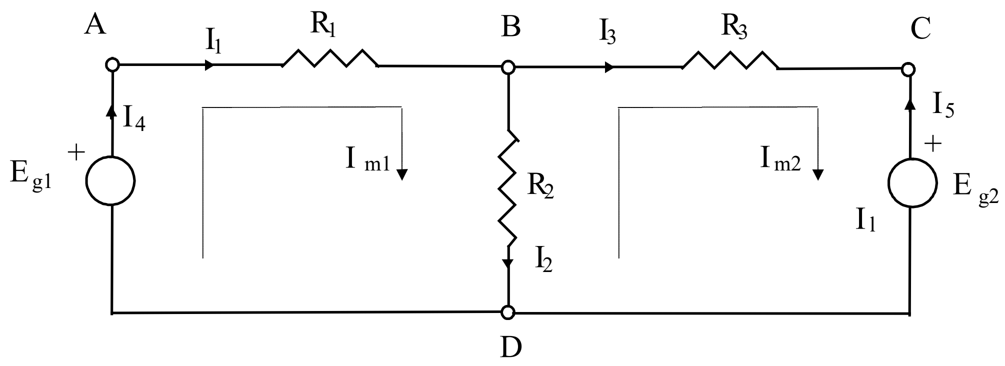

Figura 2. Circuito ejemplo para la resolución por mallas.

En principio habría que plantear las ecuaciones nodales ($n-1$ ecuaciones), las ecuaciones circulares ($r-(n-1)$ ecuaciones) y las ecuaciones de rama (r ecuaciones), pero se va a considerar una forma más reducida de resolver el circuito.

Se definen unas intensidades de malla I_{m1} y I_{m2}, se consideran todas con el mismo sentido, de forma que las intensidades de las ramas son:

$$I_1 = I_{m1}$$

$$I_2 = I_{m1} - I_{m2}$$

$$I_3 = I_{m2}$$

$$I_4 = I_{m1}$$

$$I_5 = -I_{m2}$$

Entonces, para la resolución con *ecuaciones circulares* se consideran las ecuaciones de todas las mallas, en donde están las ecuaciones de rama:

$$m_1) - E_{g1} + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$m_2) - R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + E_{g2} = 0$$

Sustituyendo para resolver el problema a partir de las intensidades de malla, se tiene:

$$m_1)\ E_{g1} = R_1 \cdot I_{m1} + R_2 \cdot (I_{m1} - I_{m2})$$

$$m_2)\ -E_{g2} = -R_2 \cdot (I_{m1} - I_{m2}) + R_3 \cdot I_{m1}$$

Es decir, únicamente se va a aplicar la 2ª ley de Kirchoff a todas las mallas.

Operando, se tiene:

$$m_1)\ E_{g1} = (R_1 + R_2) \cdot I_{m1} - R_2 \cdot I_{m2}$$

$$m_2)\ -E_{g2} = -R_2 \cdot I_{m1} + (R_2 + R_3) \cdot I_{m2}$$

Se resuelve esta ecuación y se calculan las intensidades de malla I_{m1} y I_{m2}. A partir de ellas se calculan las intensidades de rama:

$$I_1 = I_{m1}$$

$$I_2 = I_{m1} - I_{m2}$$

$$I_3 = I_{m2}$$

$$I_4 = I_{m1}$$

$$I_5 = -I_{m2}$$

Luego se determinan las tensiones de rama:

$$U_1 = R_1 \cdot I_1$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_2$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3$$

$$U_4 = -E_{g1}$$

$$U_5 = -E_{g2}$$

En general se trata de resolver una ecuación matricial de la forma:

$$Z_m \cdot \hat{\imath}_m = \hat{e}_g$$

donde:

- Z_m es una matriz cuadrada de impedancias de malla, de dimensión es:
$$\big(r - (n-1)\big) \cdot \big(r - (n-1)\big)$$
- $\hat{\imath}_m$ es un vector columna de las intensidades de malla, de dimensión:
$$\big(r - (n-1)\big) \cdot 1$$
- $\hat{e}_g$ es un vector columna de fuentes de tensión de malla, de dimensión:
$$\big(r - (n-1)\big) \cdot 1$$

Obtenidas las intensidades de malla, se calculan el resto de las variables.

Determinación de la matriz Z_m.

- Cada elemento de la diagonal Z_{ii} es la suma de las resistencias en la malla "i"
- Cada elemento fuera de la diagonal Z_{ij} es la suma de las resistencias que son comunes a las mallas "i" y "j" con signo mas si los sentidos de las mallas coinciden para esa rama y con signo menos en caso contrario.

Determinación del vector columna $\hat{e}_g$.

Cada elemento de este vector columna $\hat{e}_{gj}$ es la suma algebraica de las fuentes de tensión considerándose positivas si tienen el sentido contrario a la tensión E_g (es decir sale del $+$) y negativas en caso contrario (sale del $-$). Esto se representa en la Figura 3.

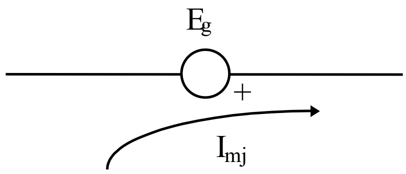

Figura 3. Consideración del signo de una fuente de tensión.

$$\hat{e}_{gj} = \cdots + E_g \cdot \ldots$$

Se pueden hacer varias consideraciones:

- El sentido de las intensidades de malla puede ser cualquiera. Si se considera el mismo sentido para todas las mallas los elementos que están fuera de la diagonal Z_{ij} son todos negativos.
- Cualquiera que sea el sentido de las mallas los elementos de la diagonal Z_{ii} son todos positivos.
- La matriz es simétrica es decir $Z_{ij} = Z_{ji}$

Determinación del vector columna $\hat{\imath}_m$.

Se define la ley de Ohm de la manera:

$$Z_m \cdot \hat{\imath}_m = \hat{e}_g$$

Con lo que se puede determinar la variable $\hat{\imath}_m$ como:

$$\hat{\imath}_m = {Z_m}^{-1} \cdot \hat{e}_g$$

Por definición, la *matriz inversa* se puede determinar de la forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t$$

Donde, la matriz traspuesta. Es la que resulta de cambiar filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Y la *matriz adjunta* se obtiene de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Siendo el adjunto de un elemento el menor complementario con signo positivo o negativo según sea par o impar la suma de su número de fila y su número de columna.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

En general, si se tienen fuentes de intensidad, se deberán pasar a fuentes de tensión. Luego se tratarán todas las fuentes como si fuesen independientes con lo que en $\hat{e}_g$ se tendrán fuentes de tensión independientes, fuentes de tensión dependientes de intensidad y fuentes de tensión dependientes de tensión.

Para las fuentes de tensión dependientes de intensidad, la intensidad de la rama se pondrá en función de las intensidades de malla.

Para las fuentes de tensión dependientes de tensión

- Si la rama es resistiva, la tensión será la resistencia de la rama por la intensidad de rama. Esta intensidad de rama se pondrá en función de las intensidades de malla.
- Si la rama fuese una fuente de tensión independiente, se tiene un dato y si en cambio fuese una fuente dependiente esta a su vez se pondría en función de las intensidades de malla.

Entonces en $\hat{e}_g$ se tienen términos que son fuentes independientes y términos que dependen de las intensidades de malla. Estos últimos términos se pasan a la parte izquierda de la expresión resultando:

$$Z'_m \cdot \hat{\imath}_m = e'_g$$

donde:

- Z'_m es la matriz cuadrada de impedancias de malla modificada.
- e'_g es el vector columna de fuentes de tensión de malla modificado.